

Начинаем ...

Понятие ряда. Общий член ряда. Частичная сумма ряда. Сумма ряда. Сходящиеся и расходящиеся ряды. Понятие n -го остатка ряда.

Геометрический смысл суммы ряда. (помогает осознать первый признак сравнения и интегральный признак)

Основной вопрос исследования рядов: *сходится ряд или расходится*. Уважаемые студенты, а понимаете ли вы, почему именно этот вопрос является основным, хотя при работе с рядом основная задача – это найти его сумму.

ИССЛЕДОВАНИЕ ЧИСЛОВЫХ РЯДОВ НА СХОДИМОСТЬ**1. Эталонные ряды.**

1) **Геометрический ряд** (ряд геометрической прогрессии) $\sum_{n=0}^{\infty} b_1 q^n$.

При $|q| < 1$ ряд сходится, при $|q| \geq 1$ ряд расходится.

Примеры.

2) **Гармонический ряд** $\sum \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$ Этот ряд *расходится*.

Этот ряд иногда будем называть простым гармоническим рядом.

3) **Обобщённый гармонический ряд** $\sum \frac{1}{n^p}$. p – параметр.

(При $p = 1$ получается простой гармонический ряд.)

При $p > 1$ ряд сходится, при $p \leq 1$ ряд расходится.

Примеры. $\sum \frac{1}{n^2}$; $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$.

2. Необходимое условие сходимости ряда.

Если ряд $\sum a_n$ сходится, то $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$.

Обратите внимание, если $\lim |a_n| = 0$, то ряд может сходиться, а может и расходиться.

Например, для гармонического ряда $\sum \frac{1}{n}$ имеем $\lim |a_n| = 0$, но этот ряд расходится.

Признак расходимости ряда: если $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| \neq 0$, то ряд $\sum a_n$ расходится.

Докажите это, используя необходимое условие сходимости.

3. Некоторые простые факты (используемые при исследовании рядов).

1) Если один ряд получается из другого удалением или добавлением конечного числа членов, то оба ряда сходятся или расходятся одновременно.

2) Если один ряд получается из другого умножением или делением на какое-то число, отличное от нуля, (ряд $\sum a_n$ и ряд $\sum k a_n$ или $\sum \frac{1}{k} a_n$)

то оба ряда сходятся или расходятся одновременно.

3) Если ряды $\sum a_n$ и $\sum b_n$ сходятся, то и ряды $\sum (a_n \pm b_n)$ тоже сходятся.

Сумма или разность сходящихся рядов является также сходящимся рядом.

Задание на доказательство. Используя утверждение 3), докажите (от противного), что если ряд $\sum a_n$ сходится, а ряд $\sum b_n$ расходится, то ряд $\sum (a_n + b_n)$ расходится.

Задача. Исследовать на сходимость ряд: $\frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{5^2} + \dots$

4. Признаки сходимости положительных рядов.

1) **Интегральный признак.** Если $a_n = f(n) > 0$ и $f(x)$ – монотонно убывающая на $[1, +\infty]$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Пример. Исследование сходимости гармонического ряда.

2) **Первый (простой) признак сравнения.** Пусть имеются два ряда с неотрицательными членами $\sum a_n$ и $\sum b_n$. Пусть $0 \leq a_n \leq b_n$, начиная с какого-то n . Тогда если "большой" ряд сходится, то и "меньший" ряд сходится. Если "меньший" ряд расходится, то и "большой" ряд расходится.

Пример. $\sum \frac{1}{\ln n}$, $\sum \frac{|\sin n|}{n\sqrt{n}}$, $\sum \frac{\ln n}{n^3}$.

3) **Второй (предельный) признак сравнения.** Пусть имеются два ряда с положительными членами $\sum a_n$ и $\sum b_n$. Если $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = k \neq 0$, то оба ряда сходятся или расходятся одновременно.

Следствие. Если (при $n \rightarrow \infty$) $a_n \sim b_n$, то ряды $\sum a_n$ и $\sum b_n$ сходятся или расходятся одновременно.

Практическое правило. При исследовании ряда с положительными членами на сходимость в его общем члене множители и делители следует заменять на эквивалентные величины, стремясь получить более простой ряд.

Пример. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{1}{n}}{n^2}$; $\sum \frac{\ln(1 + \frac{1}{\sqrt{n}})}{n}$.

Добавление к таблице эквивалентностей.

1. При стремлении аргумента к бесконечности ($x \rightarrow \infty$) многочлен эквивалентен своему старшему члену: $P_n(x) \sim a_n \cdot x^n$, ($a_n \neq 0$).

2. При $x \rightarrow +\infty$: $\sqrt{x+c} \sim \sqrt{x}$; $\ln(x+c) \sim \ln x$.

Добавьте эти формулы (если их у вас там нет) в таблицу эквивалентностей, которую мы составили в первом семестре при вычислении пределов.

4) Признак Даламбера.

Пусть члены ряда $\sum a_n$ положительны и пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = d$.

Тогда, если $d < 1$, то ряд сходится, если $d > 1$, то ряд расходится.

Примеры.

Использование теории рядов при вычислении пределов. Сравнение роста функций: n^n , $n!$, c^n .

Пример. Докажите, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{100^n}{n!} = 0$.

5) **Признак Коши.** Пусть члены ряда $\sum a_n$ положительны и пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = c$.

Тогда, если $c < 1$, то ряд сходится, если $c > 1$, то ряд расходится.

Замечание об исследовании рядов с отрицательными членами. Такой ряд надо умножить на -1 . В результате получится ряд с положительными членами. Исходный и полученный ряд сходятся или расходятся одновременно (поясните, почему?) Так что остаётся исследовать этот положительный ряд.

5. Признаки сходимости для рядов, не являющихся знакопостоянными.

Напомним для начала, что признак расходимости ($\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| \neq 0$) справедлив для произ-

вольных (знакопеременных) рядов. И ещё один момент сразу отметим: при исследовании на сходимость ряда, являющегося знакопроизвольным (знакопеременным) (в частности, знакочередующимся), надо указывать, сходится ли он условно или абсолютно.

1) Признак сходимости для знакопроизвольных рядов:

Модульный признак.

Если сходится ряд из модулей $\sum |a_n|$, то сходится и сам ряд $\sum a_n$.

Замечание. Если ряд из модулей расходится, то сам ряд может расходиться, но может и сходиться.

2) Признак сходимости для знакочередующихся рядов:

Признак Лейбница. Пусть имеется ряд $a_1 - a_2 + a_3 - \dots + a_n - a_{n+1} + \dots$, знаки членов которого чередуются. Пусть при этом a_n монотонно убывают ($a_1 > a_2 > a_3 > \dots > a_n > a_{n+1} > \dots$), и $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Тогда ряд $a_1 - a_2 + a_3 - \dots + a_n - a_{n+1} + \dots$ сходится.

Замечание. В формулировке признака Лейбница a_n - модули членов ряда.

Пример.

Замечание. Если в качестве приближённого значения суммы ряда "типа Лейбница" взять n -ую частичную сумму S_n , то модуль допускаемой при этом погрешности не превышает модуля первого отброшенного члена: $|S - S_n| \leq |a_n|$.

Вопрос студентам. Можно ли при исследовании какого-нибудь ряда утверждать, что на основании признака Лейбница этот ряд расходится.

6. Условно и абсолютно сходящиеся ряды.

Определения. Если сходится и сам ряд, и ряд из модулей, то ряд называется **абсолютно сходящимся**.

Если сам ряд сходится, но ряд из модулей расходится, то ряд называется **условно сходящимся**.

Замечание. Если вы исследуете ряд, не являющийся знакопостоянным, то надо выяснить сходится он условно или абсолютно.

Примеры. $\sum (-1)^n \frac{1}{n}$; $\sum (-1)^n \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$; $-\frac{1}{2^3} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{6^3} - \frac{1}{7^3} + \dots$

Теорема. Если ряд сходится абсолютно, то он остаётся абсолютно сходящимся и его сумма не меняется при любой перестановке его членов. Если ряд сходится условно, то при перестановке его членов сумма может измениться. Более того, члены условно сходящегося ряда можно так переставить, что его сумма будет равна любому заранее указанному числу. И (вы в это, может быть, совсем не поверите) члены условно сходящегося ряда можно так переставить, что ряд станет расходящимся.

Так что можно понять тех, кто считает условно сходящиеся ряды в некотором смысле неполноценными рядами. Они похожи на студентов условно переведённых в следующий семестр, или эти студенты похожи на такие ряды. На один и тот же вопрос каждый раз такие студенты отвечают по-разному и каждый раз неправильно.

Подытоживая главу о числовых рядах, приведём рекомендуемый план исследования ряда на сходимость.

1. Посмотрите, не является ли ваш ряд каким-либо из эталонных рядов.
2. Посмотрите, выполняется ли необходимое условие сходимости ряда.
3. Посмотрите, не надо ли воспользоваться "простыми" фактами, приведёнными выше в п.3.
4. Если ряд положительный, то воспользуйтесь признаками сходимости: первым и вторым признаками сравнения, практическим правилом использования эквивалентности, признаком Даламбера, интегральным признаком, признаком Коши. Выяснив, сходится ряд или расходится, пишите ответ.
5. Если ряд знакопроизвольный (знакопеременный) (в частности, знакочередующийся), то сначала рекомендуется исследовать ряд из модулей. При этом руководствуемся пунктами 1-4. Если оказывается, что ряд из модулей сходится, то пишем ответ: исходный ряд сходится абсолютно.
6. Если для нашего знакопроизвольного (в частности, знакочередующегося) ряда ряд из модулей оказывается расходящимся, то надо ещё исследовать сам ряд. (Из материала нашего базового курса высшей математики для этого имеется только признак Лейбница; поэтому в задаче на этом шаге у нас может быть только знакочередующийся сходящийся ряд; иначе мы задачу решить не сможем.) Применяем признак Лейбница. Если условия признака не выполняются, то имеющихся у нас знаний недостаточно для решения задачи. Если условия признака Лейбница выполняются, то ряд сходится. И мы пишем ответ: ряд сходится условно.

ИССЛЕДОВАНИЕ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ НА СХОДИМОСТЬ**7. Исследование степенных рядов.**

Сначала ... Понятие функционального ряда.

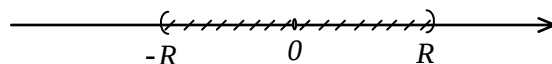
В нашем курсе высшей математики мы изучаем два вида функциональных рядов: степенные ряды и тригонометрические ряды Фурье.

Определение. Областью сходимости функционального ряда называется множество тех значений x , при которых этот ряд сходится.

Теперь переходим к степенным рядам.

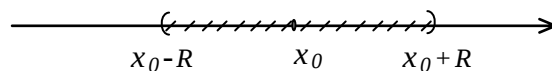
Ряд вида $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots$ называется простым (базовым) степенным

рядом. Областью сходимости такого ряда является промежуток числовой оси с центром в нуле и "радиусом" R .



Ряд вида $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 \cdot (x - x_0) + a_2 \cdot (x - x_0)^2 + \dots$ называется

степенным рядом общего вида. Областью сходимости такого ряда является промежуток числовой оси с центром в точке x_0 и "радиусом" R .



Радиус R может быть равен нулю или бесконечности. Радиус сходимости считают равным нулю, если ряд сходится только в одной точке. Радиус сходимости считают равным бесконечности, если ряд сходится на всей числовой оси. Внутреннюю часть промежутка сходимости называют **интервалом сходимости**. В интервале сходимости ряд сходится абсолютно. На концах промежутка сходимости ряд может сходиться абсолютно или условно, или вообще может расходиться.

В исследовании степенных рядов на сходимость при нахождении области сходимости степенного ряда можно выделить два этапа:

1) Находим **интервал** сходимости степенного ряда. Так как в интервале сходимости степенной ряд сходится абсолютно, то при нахождении интервала сходимости надо работать с рядом из модулей. Так как (при $x \neq 0$ или $x \neq x_0$) такой ряд положительный, то можно пользоваться признаками сходимости положительных рядов (в примерах, которые дают студентам, чаще всего используется признак Даламбера, реже – признак (радикальный) Коши).

Заметим, что для рядов, указанных выше типов, в теории выводится формула для радиуса сходимости

$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}$. Поэтому в задачах, где фигурируют именно такие ряды, на первом шаге

можно найти радиус сходимости по этой формуле.

2) Затем надо сделать рисунок с изображением интервала сходимости на числовой оси. И, наконец, исследовать сходимость ряда на концах интервала сходимости.

РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ В СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

Ряд Тейлора (произвольной функции) (это будет степенной ряд общего вида) имеет вид:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!} (x - x_0)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + \dots$$

Для коэффициентов этого (степенного) ряда имеет место формула $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$. Будем

называть её формулой Тейлора для коэффициентов степенного ряда.

Ряд Маклорена (произвольной функции) (это частный случай ряда Тейлора с $x_0 = 0$) (это будет степенной ряд простейшего вида) имеет вид:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \dots$$

Для некоторых конкретных (базовых) функций на лекциях или на практических занятиях выводятся формулы

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

(всё как в ряде Маклорена для произвольной функции, только значения функции и значения производных, равны единице)

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots$$

(по сравнению с предыдущей формулой в правой части пропадает единичка, пропадает факториал, а знаки чередуются).

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + \dots$$

Два частных случая последней формулы ... (не надо частные случаи запоминать)

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + \dots$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots$$

Разложения для других функций могут быть получены либо непосредственно по формулам Тейлора и Маклорена, либо на основе имеющихся формул для базовых функций.

РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ В ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ РЯДЫ ФУРЬЕ

Вступительные замечания. 1) Если в ряды Тейлора (в степенные ряды) раскладываются только "очень хорошие" функции (они должны быть бесконечное число раз дифференцируемыми – и это только необходимое условие), то в тригонометрические ряды Фурье раскладываются практически все функции, которые могут встретиться инженеру геодезисту. 2) Основной причиной, подталкивающей к разложению функции именно в тригонометрические ряды, является периодичность рассматриваемой функции. 3) ... (в окрестности точки – на промежутке).

Формула для периодической с периодом $T = 2\pi$ функции имеет вид

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

где

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

Формула для периодической с периодом $T = 2l$ функции имеет вид

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{\pi nx}{l} + b_n \sin \frac{\pi nx}{l},$$

где

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{\pi nx}{l} dx, \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{\pi nx}{l} dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

Замечания. Постоянное слагаемое в этих формулах имеет смысл среднего значения функции в области определения, а часть формулы с синусами и косинусами представляют собой меняющуюся (около этого среднего значения) составляющую функции.

У чётной функции членов с синусами не будет, а коэффициенты при косинусах могут быть вычислены по формуле

.....

У нечётной функции членов с косинусами не будет, а коэффициенты при синусах могут быть вычислены по формуле

.....