

## ПРОГРАММА (СОДЕРЖАНИЕ) (ВОПРОСЫ) ЭКЗАМЕНА

ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ ЗА 4 СЕМЕСТР ДЛЯ СТУДЕНТОВ ГФ 2 – 1-4, 7-8.

Май 2011 г. Лектор Лисеев И.А.

Какие-то из этих вопросов (как правило, это вопросы с доказательствами) будут включены в билет, а какие-то вопросы будут заданы студенту, когда он уже будет отвечать экзаменатору. Если вопрос билета предполагает много доказательств, то экзаменатор может сказать (после того, как вы перечислили всё, что предполагается доказывать), что надо, а что не надо доказывать.

Уважаемые студенты, с вопросами вы можете обращаться на сайт в гостевую книгу. Отвечать буду либо в гостевой книге, либо в отдельном файле на сайте.

### Раздел ... РЯДЫ

#### Глава 1. Числовые ряды

##### 1. Ряды. Начальные понятия.<sup>1</sup>

Понятие ряда. Числовые и функциональные ряды. Примеры.

Понятие суммы ряда. Практическое значение факта **сходимости** ряда.

2. Понятие остатка ряда. Теорема об остатке. Теорема о приписывании-удалении конечного числа членов ряда.

Интерпретация остатка ряда как погрешности ... Дополнение к теореме об остатке ряда.

##### 3. Примеры с парадоксами. Объяснение этих парадоксов.

1) Пример с разными значениями "суммы" ряда при перегруппировке его членов.

2) Пример с изменением суммы ряда при перестановке его членов **(Док-0)**.

##### 4. Свойства сходящихся рядов.

Сочетательный закон (о возможной различной группировке членов ряда).

Линейные операции со сходящимися рядами.

Теорема о сходимости-расходимости суммы-разности рядов.

Теорема об умножении ряда на число.

##### 5. Знакопеременные ряды.

Условно и абсолютно сходящиеся ряды. Определение. Модульный признак сходимости рядов **(Док-□)**. Теорема об условно сходящихся рядах. Теорема об абсолютно сходящихся рядах.

6. Необходимое условие сходимости ряда **(Док-Δ)**. Важное предостережение.

Признак расходимости ряда.

7. Эталонные ряды. Исследование на сходимость-расходимость **(Док-□)**.

8. Геометрическая интерпретация суммы ряда. Сравнение с несобственными интегралами с бесконечным верхним пределом интегрирования.

Интегральный признак сходимости рядов. **(Док-#)**.

9. Геометрическая интерпретация суммы ряда. Связь сходимости-расходимости ряда с площадью столбчатой фигуры.

Первый (простой) признак сравнения (признак сходимости-расходимости рядов).

10. Второй (предельный) признак сравнения. Следствие (признак сравнения по эквивалентности).

Доказательство эквивалентностей при  $n \rightarrow \infty$  :

$$P_n(x) \sim a_n \cdot x^n; \sqrt{n+c} \sim \sqrt{n}; \ln(n+c) \sim \ln(n).$$

##### 11. Признак Даламбера.

Лемма. Основная теорема **(Док-#)**.

12. Сравнение роста функций "на бесконечности" (при  $n \rightarrow +\infty$ ).

$n^n, n!, a^n$ . **(Док-□)**.

<sup>1</sup> Пунктирное подчёркивание здесь и далее будет обозначать как бы заголовок; а после него перечисляется, что я под этим имею в виду.

13. Радикальный признак Коши (формулировка).

14. Знакопостоянные, знакопеременные и знакопеременяющиеся ряды.

Признак Лейбница. Оценка остатка ряда лейбницевского типа (Док-Δ), практическое использование.

## Глава 2. Функциональные ряды

15. Понятие функциональных рядов. Область сходимости. Сумма ряда. Понятие разложимости функции в ряд. Абсолютная сходимость функциональных рядов.

16. Пример с непрерывными членами ряда и разрывной его суммой.

Какие виды сходимости функциональных рядов мы знаем? Признак равномерной сходимости функциональных рядов.

Четыре свойства равномерно сходящихся функциональных рядов (упрощённые формулировки, к нюансам я придираюсь не буду).

17. Понятие степенного ряда (простейший и общий виды). Теорема Абеля (первая часть: о сходимости ряда; вторая часть (в лекциях она названа следствием): о расходимости ряда) (Док-#).

18. Вид области сходимости степенных рядов с действительными и комплексными членами.

Понятие радиуса сходимости степенного ряда (случаи действительных и комплексных рядов, случаи простейших рядов и рядов общего вида).

Характер сходимости степенного ряда внутри области сходимости (теорема об абсолютной сходимости степенных рядов).

19. Нахождение области сходимости степенного ряда.

Лемма. Теорема о радиусе сходимости (Док-□). ?

20. Свойства степенных рядов.

Базовая теорема. Теорема о непрерывности суммы ряда. Следствие из этой теоремы. Использование этого следствия на примере.

Лемма о радиусе сходимости трёх степенных рядов. Теорема об интегрировании степенных рядов. Теорема о дифференцировании степенных рядов.

21. Ряды Маклорена. Смысл остаточного члена в формуле Маклорена.

Теорема о степенном ряде по степеням  $x$  для данной функции (теорема о коэффициентах степенного ряда) (Док-Δ).

Необходимое условие разложимости функции в степенной ряд (Док-0).

Необходимое и достаточное условие разложимости функции в степенной ряд (Док-Δ).

Достаточное условие разложимости функции в степенной ряд (Док-Δ).

22. Ряды Тейлора. Теорема о степенном ряде по степеням  $x-x_0$  для данной функции. Замечание об условиях разложимости ...

23. Понятие аналитической функции.

24. Разложение конкретных функций в степенные ряды Маклорена.

(Док-□)  $f(x) = e^x$ .

(Док-Δ)  $f(x) = \sin x$ .

(Док-Δ)  $f(x) = \cos x$ .

(Док-#)  $f(x) = \ln(1+x)$ .

## Глава 3. Степенные ряды с комплексными членами.

## Некоторые функции комплексного переменного

1. Понятие функции комплексной переменной. Геометрический смысл. Сведение к функциям действительного переменного.
2. Предел последовательности комплексных чисел. Числовые ряды с комплексными членами. Степенные ряды. Область сходимости. Радиус сходимости. Вычисление радиуса сходимости.
3. Определения функций комплексной переменной:  $e^x$ ,  $\sin x$ ,  $\cos x$ .  
Формулы Эйлера (Док-Δ).  
Некоторые привычные свойства указанных функций (по одному свойству для каждой функции) (Док-Δ).
4. Некоторые непривычные свойства показательной и тригонометрических функций (синуса и косинуса) комплексной переменной (Док-Е).
  - 1) периодичность показательной функции.
  - 2) неограниченность синуса и косинуса.
5. Понятие о функциях комплексного переменного (то, что было на лекции). Определение, геометрический смысл. Дифференцирование функций комплексного переменного. Случай, когда действительная и мнимая части функции заданы раздельно. Условия Коши-Римана. Аналитические функции. Геометрический смысл модуля и аргумента производной. Конформные отображения. Определение интеграла от функции комплексной переменной. Теорема Коши.

## Глава 4. Тригонометрические ряды Фурье

1. Скалярное произведение функций на отрезке.  
Простейшая тригонометрическая система функций. Свойства этой системы (два свойства) (Док-□).
2. Простейший тригонометрический ряд.  
Определение, другая запись (Док-Δ), периодичность.
3. Тригонометрическая система и тригонометрические ряды общего вида.
4. Вычисление коэффициентов тригонометрического ряда.  
Лемма. основная теорема (Док-□).
5. Разложимость функций в ряд Фурье.  
Расширение понятия сходимости для точек разрыва первого рода.  
Достаточные условия разложимости функции в ряд Фурье.
6. Ряды Фурье для чётных и нечётных функций. (Док-0).
7. Разложение в ряд Фурье непериодических функций.
8. Практические аспекты разложения функций в ряд Фурье.
 

1) Поведение частичных сумм.	2) Свойство коэффициентов Фурье.
3) Смысл первого слагаемого ...	4) Геометрическая интерпретация.
5) Механическая интерпретация.	6) Явление Гиббеа.
- ~~9. Комплексная форма рядов Фурье.  
Представление ряда Фурье в комплексном виде (Док-Δ).  
Формулы для коэффициентов Фурье в комплексном виде.~~

Раздел ... ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Для краткости вместо "дифференциальные уравнения" мы иногда будем писать: "д. у."

1. Вывод закона "естественного роста". Примеры (с пояснениями) областей знаний, где имеет место этот закон. Понятие об "универсальности" математических задач. "Дифференциальная схема" вывода законов природы.

2. Основные-базовые понятия, связанные с дифференциальными уравнениями.

Понятие дифференциального уравнения. Порядок дифференциального уравнения. Обыкновенные и ... (какие ещё бывают?) дифференциальные уравнения.

Понятие решения дифференциального уравнения. Интегральная кривая. Понятие интеграла д.у.

3. Задача Коши для д.у. первого порядка. Геометрический смысл.

4. Понятие общего и частного решения д.у. первого порядка.

5. Понятие общего и частного интеграла д.у.

6. Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши для д.у. первого порядка.

7. Понятие особого решения для д.у. первого порядка. Пример.

8. Линейные д.у. 1 порядка. Условия существования и единственности решения задачи Коши для этих уравнений **(Док-Δ)**. Замечание об общем решении.

Два метода решения этих уравнений.

9. Дифференциальные уравнения второго порядка. Задача Коши и краевая задача для д.у. 2 порядка. Их геометрический смысл. Примеры.

10. Понятие общего и частного решения д.у. 2 порядка.

11. Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши для д.у. 2 порядка.

12. Два типа неполных д.у. 2 порядка ("нет  $x$ ", "нет  $y$ "). Алгоритм их решения.

13. Линейные д.у. 2 порядка. Условия существования и единственности решения задачи Коши для этих уравнений **(Док-Δ)**. Замечание об общем решении.

14. Линейная зависимость и независимость функций на промежутке.

15. Простой признак линейной зависимости-независимости двух функций **(Док-□)**.

16. Определитель Вронского. Признак Вронского линейной зависимости произвольных функций **(Док-□)**. Признак Вронского линейной зависимости-независимости функций-решений линейного дифференциального уравнения **(Док-#)**. Всё на примере двух функций и уравнений второго порядка.

17. Структура общего решения однородного линейного д.у. 2 порядка.

Теорема **(Док-□)**. Базисные решения линейного д.у. 2 порядка.

18. Структура общего решения неоднородного линейного д.у. 2 порядка **(Док-#)**.

19. Принцип суммирования решений для линейных д.у. (на примере уравнения 2 порядка) **(Док-Δ)**.

20. Линейные однородные дифференциальные уравнения 2 порядка с постоянными коэффициентами.

Характеристическое уравнение. Лемма **(Док-Δ)**.

Нахождение общего решения в трёх случаях (всё с док. **Δ, □, #**).

21. Нахождение частного решения неоднородного линейного д.у. 2 порядка.

1) Метод неопределённых коэффициентов. 2) Метод вариации произвольных постоянных. **(Док-#)**.

22. Нормальные системы двух линейных однородных д.у. первого порядка с постоянными коэффициентами. Их матричная запись. Решение таких систем сведением к одному уравнению. Задача Коши для таких систем.

**Решение таких систем средствами линейной алгебры (случаи действительных собственных чисел матрицы системы)**

= == = = =

### Типы экзаменационных задач по рядам.

1. Исследование числовых рядов на сходимость.
  2. Нахождение области сходимости степенных рядов.
  3. Использование дифференцирования и интегрирования степенных рядов для нахождения суммы ряда.
  4. Разложение функций в степенные ряды.
  5. Использование степенных рядов для вычисления значений функций.
  6. Использование степенных рядов для вычисления интегралов.
  7. Разложение функций в тригонометрические ряды Фурье.
- 1) разложение периодических функций.
  - 2) разложение непериодических функций.
  - 3) разложение в ряд по синусам.
  - 4) разложение в ряд по косинусам.

### Типы экзаменационных задач на дифференциальные уравнения.

В уравнениях надо уметь находить как общее решение, так и частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям.

1.  $y^{(n)} = f(x)$ .
2. Уравнения с разделяющимися переменными.
3. Использование замены  $t = \frac{y}{x}$ .
4. Уравнения в полных дифференциалах.
5. Линейные д.у. первого порядка. Решение их методом Бернулли ( $y = u \cdot v$ ) и методом Лагранжа (методом вариации произвольной постоянной).
6. Неполные уравнения 2 порядка ("нет  $x$ ", "нет  $y$ ").
7. Линейные д.у. 2 порядка с постоянными коэффициентами однородные
8. Линейные д.у. 2 порядка с постоянными коэффициентами неоднородные. Использование, как метода неопределённых коэффициентов, так и метода вариации произвольных постоянных.
9. Нормальные системы двух линейных однородных д.у. первого порядка с постоянными коэффициентами. Решение их сведением к одному уравнению. **Решение этих систем средствами линейной алгебры (случай действительных различных или равных собственных чисел).**
10. **Численное решение диф ур первого порядка (метод Эйлера).**
11. **Решение диф уравнений с помощью рядов.**
12. **Графическое решение дифференциальных уравнений первого порядка.**

===

Структура билета.

1. Теоретический вопрос (с доказательством) по материалу 4 семестра.
2. Задача по рядам.
3. Задача по диф. ур-ям.
4. Теоретический вопрос (по материалу 4 семестра) задаст экзаменатор.

- - - -

Если вы не имеете положительной оценки по материалу 1-3 семестров, то получаете ещё вопросы .... (при этом, видимо, речь будет идти только об удовлетворительной оценке)

5. Задача по материалу 1-3 семестров.
6. Теоретические вопросы (по материалу 1-3 семестров) задаст экзаменатор.

== ==